

Demostraciones que siempre quisiste saber...

Pero no te atreviste a preguntar



Taller de Talento Matemático de Navarra
Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Pamplona, 12 de diciembre de 2025

Introducción

Por supuesto, todos conocéis muchos resultados sobre matemáticas. Por ejemplo:

- Hay infinitos números primos.
- La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- El teorema de Pitágoras.
- La fórmula de la ecuación de 2° grado.

Pero... ¿Alguna vez os han dicho por qué son ciertos estos resultados?

¡Hoy vamos a descubrirlo!

Hay infinitos números primos

Ya sabéis que un número entero positivo n se dice **primo** si tiene exactamente *dos divisores distintos*: 1 y n . Ejemplos de números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Nota 1. *¿Es primo el número 1?*

Nota 2. *El hecho de que estos números se llamen «primos» no quiere decir que sean hijos de los tíos de los otros números. El término viene de latín primus, que quiere decir «primero», en el sentido de «inicial». La idea es que los números primos son los «primeros números», lo que quiere decir que cualquier otro número puede expresarse como producto de estos números. Por ejemplo: $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$.*

Si nos ponemos a contar números primos, parece que podemos continuar sin parar todo lo que queramos —aunque cada vez nos resulta más difícil comprobar si un número lo es o no.

Pero... ¿Hay realmente *infinitos* números primos?

Hay infinitos números primos

Para entender qué estamos preguntando...

- No basta con encontrar números primos «hasta que me canse». Eso no demuestra que haya infinitos... ¡Podría demostrar que me canso fácilmente!
- Hay que *demostrar* que realmente hay infinitos números primos. Demostrar es razonar, dar un argumento que nos convenza más allá de toda duda posible.

Pero los razonamientos no surgen de la nada: para que se nos ocurran, hay que experimentar:



$$2 + 1 = 3$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$

***Al multiplicar los primeros n números primos y sumar 1...
¿El resultado siempre es otro número primo distinto?***

Hay infinitos números primos

Hay veces que sí... Y veces que no. Por ejemplo:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$$

¡No es un número primo!

La idea de nuestro razonamiento es la siguiente:

1. Supongamos, en contra de lo que queremos demostrar, que tenemos solo un número *finito* de números primos. Nuestro objetivo es ver que esto no puede ocurrir.
2. A partir de nuestros números primos, queremos llegar a construir otro número primo que no esté en nuestra lista inicial. ¿Cómo podemos lograrlo?

Vemos que no basta coger los primos de nuestra lista, multiplicarlos y sumarle 1, pero...

¿Podemos «arreglar» nuestro argumento de alguna forma?

Hay infinitos números primos

De manera general, podemos señalar los siguientes pasos:

- Suponemos que solo hay un número finito de números primos (digamos, $p_1, p_2, \dots, p_n$).
- Construimos el número $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.
 - Si p es primo, obviamente es distinto de los de nuestra lista y hemos terminado. ✓
 - Si p **no** es primo, entonces es divisible por algún número primo:
 - Si p es divisible por algún número primo que no esté en nuestra lista, ya está. ✓
 - ¿Qué pasa si algún divisor de p pertenece a nuestra lista? ***¿Puede ocurrir eso?***

Por lo que hemos ido viendo, parece que **no** pasa eso (los números 59 y 509 no estaban en la lista).

¿Podemos argumentar esto de manera general?

Hay infinitos números primos

Observación importante. Si un número n divide a a y b , entonces también divide a $a - b$.

- ¿Podéis poner cinco ejemplos distintos de esto?
- ¿Podéis razonar de manera general por qué sucede esto?

Ejemplos. Cuantos más tengáis, mejor...

- 7 divide a 56 y a 77. Vemos que también divide a $77 - 56 = 21$.
- 12 divide a 144 y a 60. Vemos que también divide a $144 - 60 = 84$

Razonamiento a partir de nuestros ejemplos. Si 7 divide a 56 y a 77, eso quiere decir que podemos escribir $56 = 7 \cdot 8$ y $77 = 7 \cdot 11$, es decir, 7 por «algo». Pero entonces tenemos que

$$77 - 56 = 7 \cdot 11 - 7 \cdot 8 = 7 \cdot (11 - 8) = 7 \cdot 3$$

¡Y esto también es 7 por «algo»!

Hay infinitos números primos

Razonamiento general. Si un número n divide a a y b , entonces podemos escribir

$$a = n \cdot p \quad \text{y} \quad b = n \cdot q$$

para ciertos números p y q . Entonces, sacando factor común,

$$a - b = n \cdot p - n \cdot q = n \cdot (p - q).$$

Esto quiere decir que n también divide a $a - b$, ¡hemos terminado!

Pero... ¿De qué nos sirve todo esto?

Hay infinitos números primos

Vamos a razonar que ningún primo de nuestra lista puede dividir a $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.

Supongamos que existe un número primo de nuestra lista (por ejemplo, p_1) que divide a p .

Evidentemente, también divide a $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, porque es uno de sus factores.

Entonces, por lo anterior, también divide a la diferencia $p - p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 1$

¡Pero el único número que divide a 1 es 1!

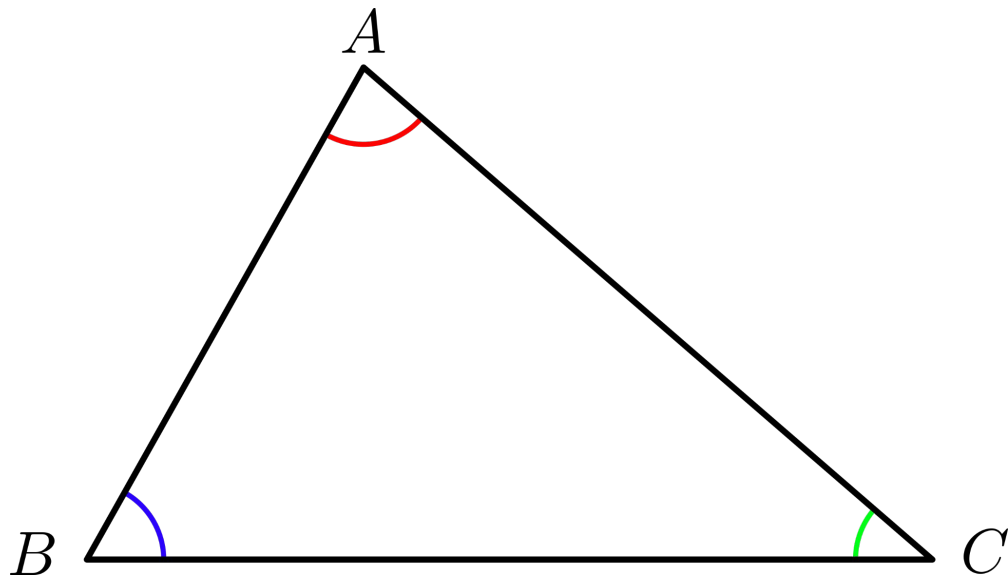
Por tanto, $p_1 = 1$. ¡Pero eso no puede ser, porque el número 1 no es primo!

Concluimos que ningún número primo de nuestra lista puede dividir a p .

Hemos terminado.

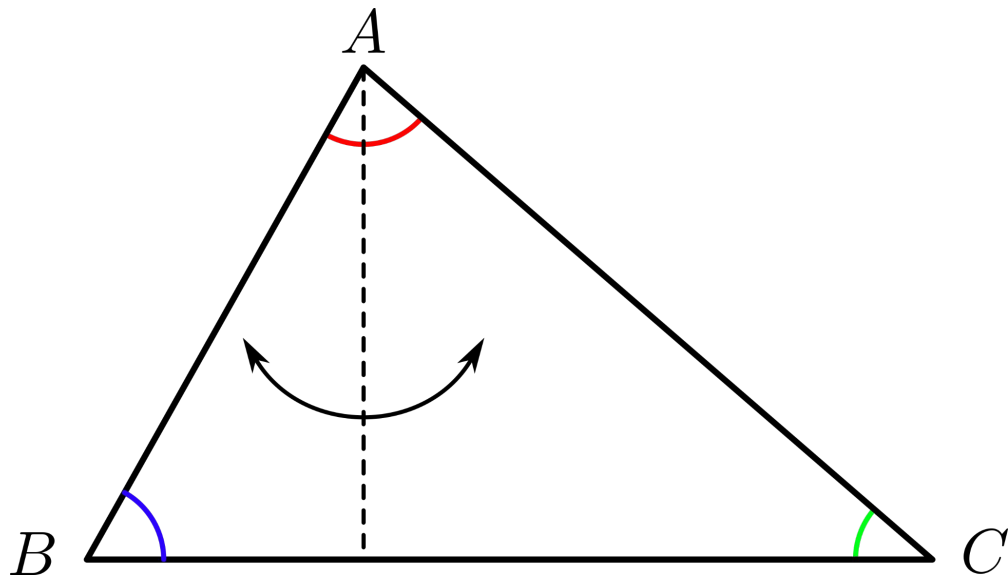
La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

Vamos a razonar por qué sucede esto usando «papiroflexia matemática».



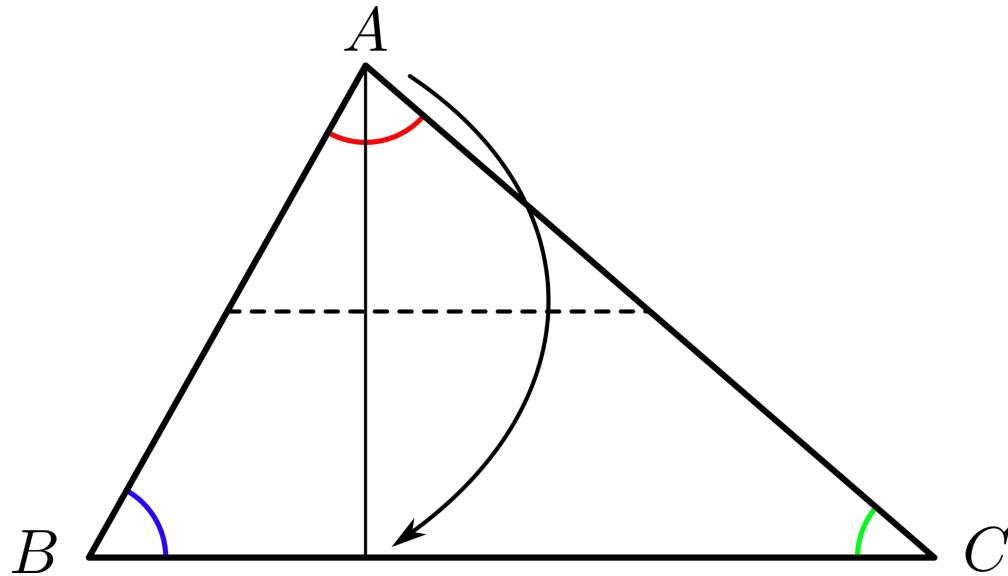
La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

Vamos a razonar por qué sucede esto usando «papiroflexia matemática».



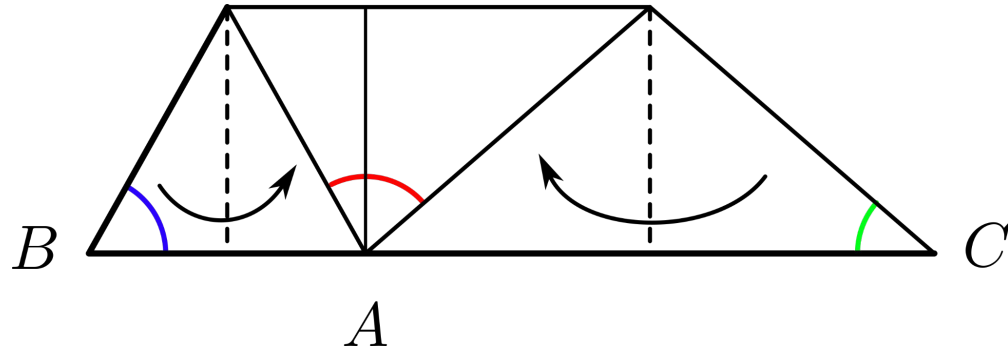
La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

Vamos a razonar por qué sucede esto usando «papiroflexia matemática».



La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

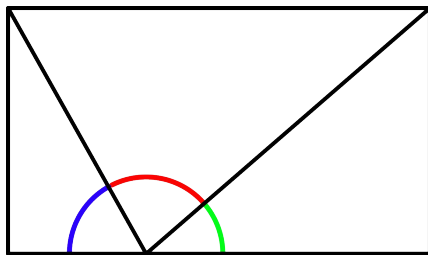
Vamos a razonar por qué sucede esto usando «papiroflexia matemática».



La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

Vamos a razonar por qué sucede esto usando «papiroflexia matemática».

¡Hemos terminado!

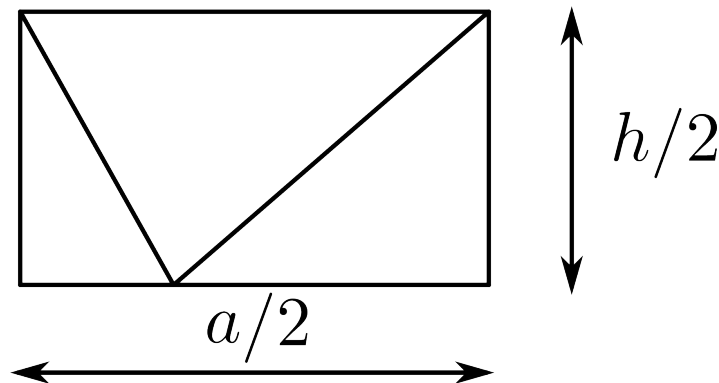


$$B \equiv A \equiv C$$

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°

Esta construcción, además, nos permite demostrar la fórmula del área del triángulo:

- La base del rectángulo es $a/2$.
- La altura del rectángulo es $h/2$.
- Por tanto, el área del rectángulo es $\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$.
- Pero el área del triángulo está *dos* veces...

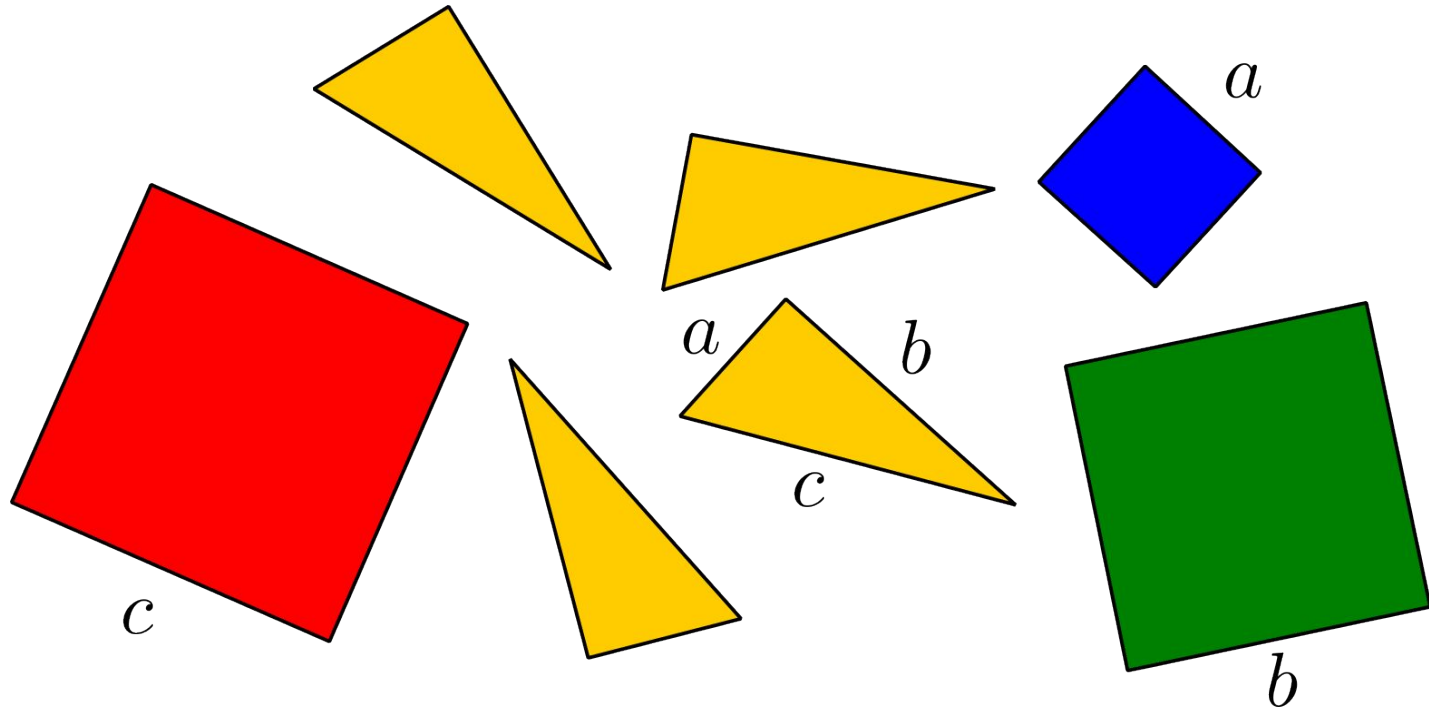


Por tanto, el área del triángulo resulta:

$$A_{\triangle} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

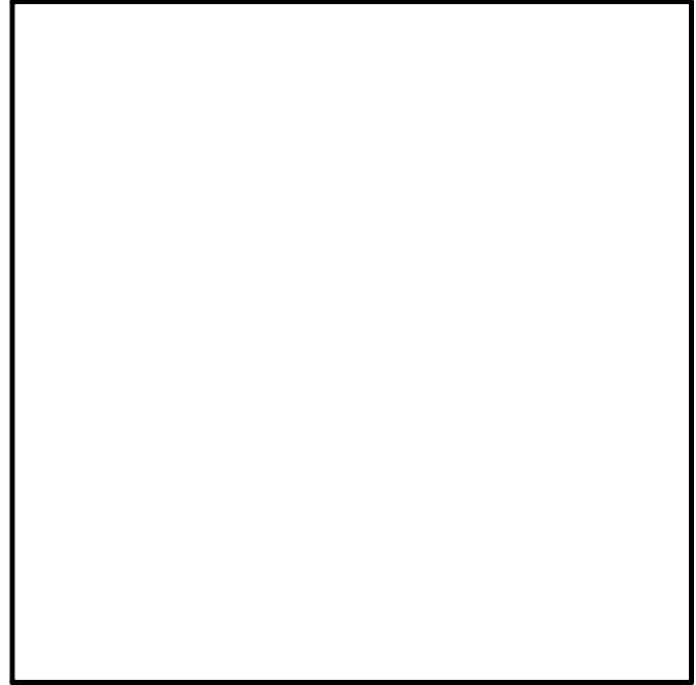
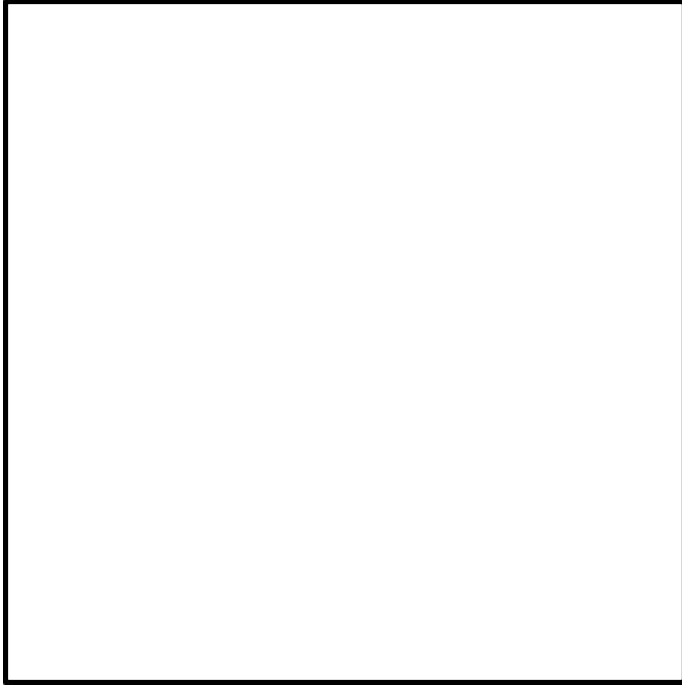
Teorema de Pitágoras

Problema. Tenemos las piezas que se observan a continuación (8 triángulos):



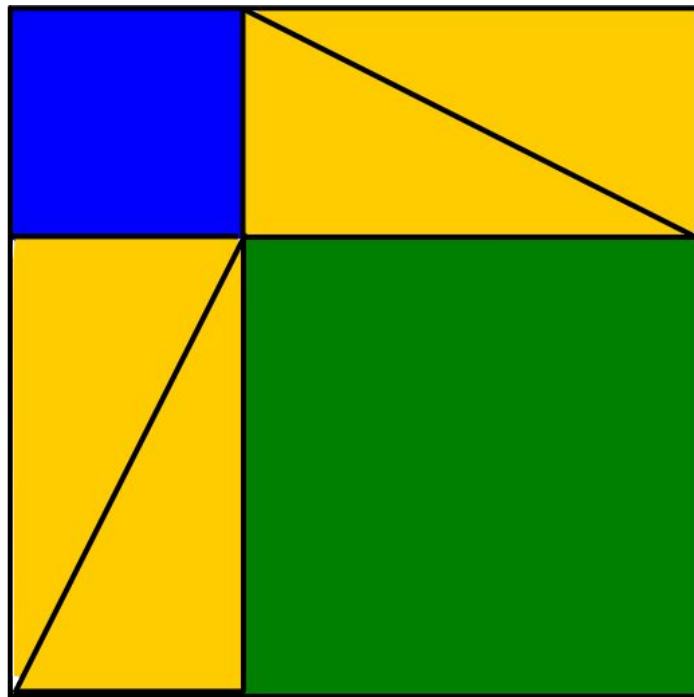
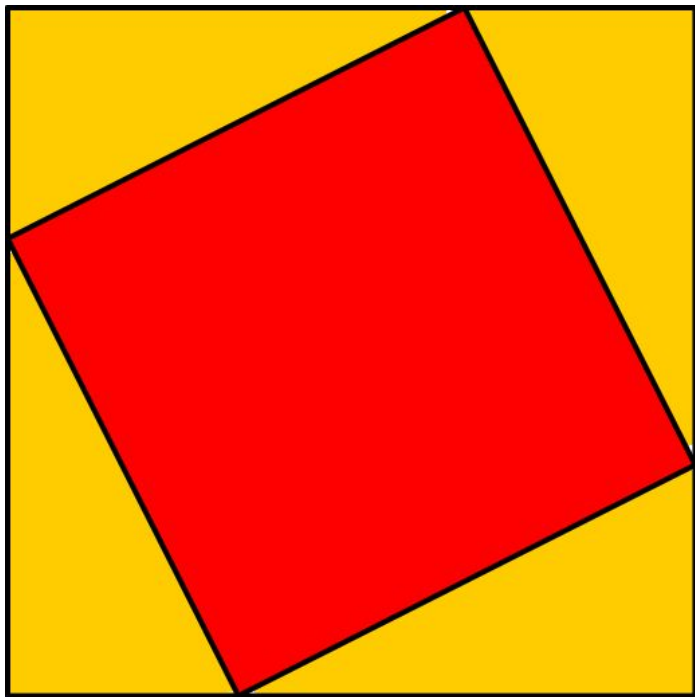
Teorema de Pitágoras

El reto consiste en colocar las fichas para cubrir estas áreas iguales **de dos maneras distintas**.



Teorema de Pitágoras

La solución al reto es...



Teorema de Pitágoras

¿Qué hemos demostrado?

- El área no cambia al cortar piezas y reordenarlas.
- En cada recuadro hay el mismo número de triángulos.
- Así, el área del **cuadrado rojo** es igual a la suma de las áreas de los cuadrados **azul** y **verde**.

Algebraicamente...

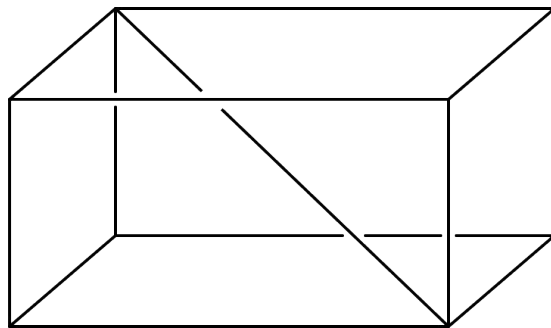
$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \quad A_c = c^2 \quad A_a = a^2 \quad A_b = b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teorema de Pitágoras

Tenemos una caja rectangular de lados a , b , c .

¿Cuál es la medida de su diagonal?

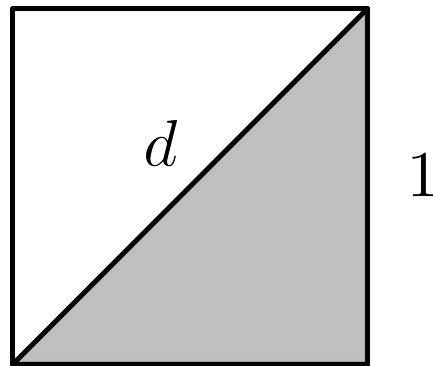
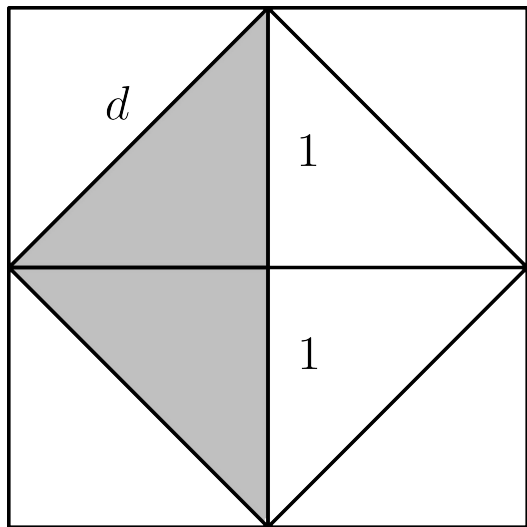


Demuestra que la altura de un triángulo equilátero es $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ veces más larga que su lado

$\sqrt{2}$ es irracional

Problema. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado en relación a su lado?

- Tomamos un cuadrado de lado 1.
- Consideramos la siguiente figura:



¡Los triángulos grises tienen la misma forma!

$$\frac{d}{1} = \frac{2}{d} \implies d^2 = 2$$

$\sqrt{2}$ es irracional

Así que d es una cantidad cumpliendo $d^2 = 2$. Por supuesto, no puede ser un número entero, ya que $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$. ¿Podría ser un número racional? ¡Vamos a probar!

Prueba con distintas fracciones a ver si puedes lograr que $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$.

Algunas de las que he probado yo son las siguientes:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{100}{49} = 2,04081632653\dots$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1,96$$

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2,006\overline{94}$$

$\sqrt{2}$ es irracional

Podríamos estar probando toda la tarde, pero el problema es que hay infinitas fracciones... Lo que podemos hacer es dividir nuestra búsqueda en cuatro casos posibles:

$$\frac{\text{impar}}{\text{impar}}$$
$$\frac{\text{impar}}{\text{par}}$$
$$\frac{\text{par}}{\text{impar}}$$
$$\frac{\text{par}}{\text{par}}$$

De hecho, si lo que buscamos son fracciones *irreducibles*, el último caso lo podemos descartar.

¿Podéis razonar caso por caso para ver por qué no son posibles los otros tres?

Pista 1. El producto de dos números impares siempre es impar.

Pista 2. El producto de dos números pares no solo es par, sino que además es múltiplo de 4 (es «dos veces un par»).

$\sqrt{2}$ es irracional

- Si tenemos una fracción de la forma impar/impar (como $\frac{7}{5}$), su cuadrado tendrá la misma forma porque el producto de dos números impares es siempre impar. Pero esto nunca puede ser igual a 2, porque el numerador es impar, con lo que no puede ser 2 veces el denominador.
- Lo mismo sucede con la forma impar/par (como $\frac{17}{12}$). Como el cuadrado de un impar sigue siendo impar, nunca podrá ser igual a 2 veces el denominador.
- Veamos la forma par/impar (como $\frac{10}{7}$). Ahora el cuadrado del numerador es par, con lo que podríamos tener alguna oportunidad. Pero el cuadrado de un número par no solo es par, sino múltiplo de 4 (es decir, es dos veces un par). En este caso quedaría:

$$\frac{\text{par}}{\text{impar}} \cdot \frac{\text{par}}{\text{impar}} = \frac{2 \cdot \text{par}}{\text{impar}}$$

$\sqrt{2}$ es irracional

$$\frac{\text{par}}{\text{impar}} \cdot \frac{\text{par}}{\text{impar}} = \frac{2 \cdot \text{par}}{\text{impar}}$$

Para que lo anterior sea igual a 2, «lo de arriba» tiene que ser 2 veces «lo de abajo». Pero esto significa que 2 veces un par debería ser 2 veces un impar, ¡lo que no puede ser! Así, descartamos el último caso.

En conclusión... ¡No existe ninguna fracción cuyo cuadrado sea igual a 2!

En otras palabras: $\sqrt{2}$ es irracional.

¿Por qué es siempre impar el producto de dos números impares?

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Seguro que habréis visto en clase la fórmula para resolver la **ecuación de segundo grado**:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pero... ¿Os han dicho de dónde sale esta fórmula?

Esta fórmula nos permite resolver ecuaciones como $d^2 = d + 1$

$$d^2 - d = 1 \quad d = 1 + \frac{1}{d} \quad d = \sqrt{d + 1}$$

Necesitamos descubrir un método que nos permita *eliminar* de algún modo una aparición de la incógnita.

La fórmula de la ecuación de 2º grado

A los matemáticos de la antigüedad, claramente, les fascinaba este tipo de ecuaciones. Por ejemplo:

*He añadido siete veces el lado de mi cuadrado y
once veces su área: seis y un cuarto.*

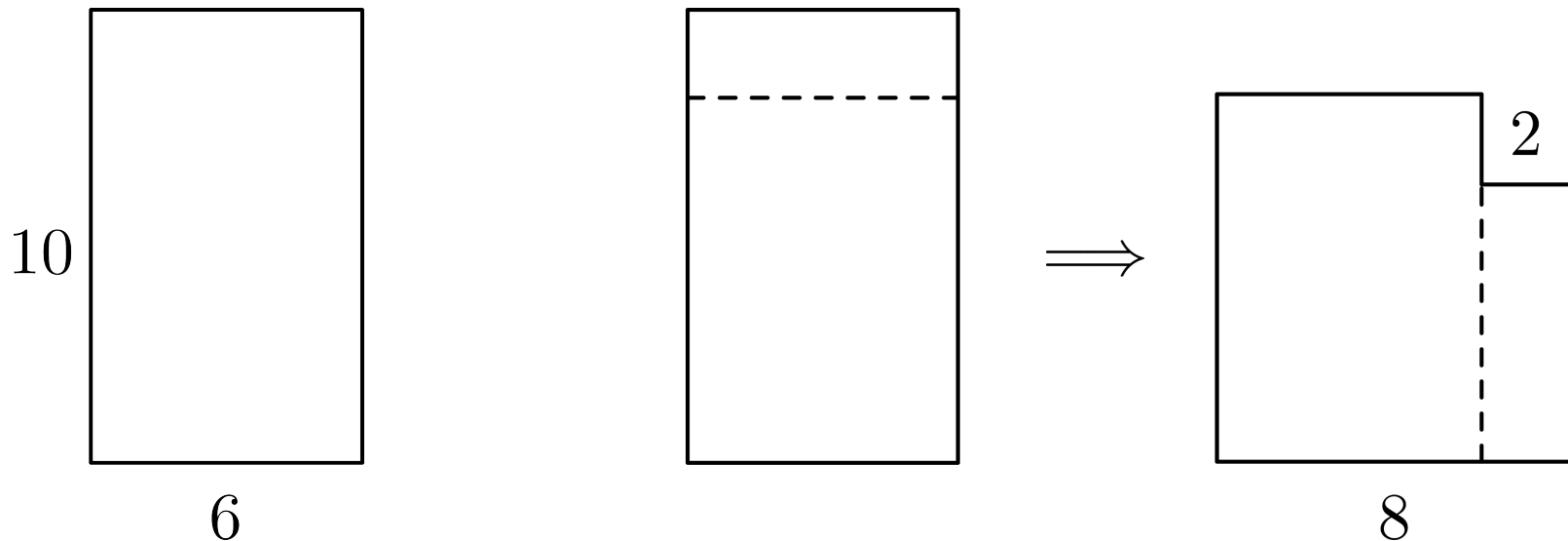
Dejando a un lado la parte geométrica...

$$7\ell + 11\ell^2 = \frac{25}{4}$$

¿Cómo resolvemos esto?

La fórmula de la ecuación de 2º grado

La respuesta tiene que ver con medir áreas de rectángulos y cuadrados:



$$6 \cdot 10 = 8^2 - 2^2$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Lo anterior se puede decir de modo más preciso:

- 8 es el promedio de 10 y 6.
- 2 es la «dispersión» de 10 y 6.

El producto de dos números es igual al cuadrado de su promedio menos el cuadrado de su dispersión.

$$4 \cdot 12 = 8^2 - 4^2$$

$$7 \cdot 13 = 10^2 - 3^2$$

$$2 \cdot 3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

En realidad... Esto ya lo sabíais:

$$(a + s)(a - s) = a^2 - s^2$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Pero... ¿De qué nos sirve todo esto? Supongamos que tenemos la ecuación de 2º grado

$$w^2 + 4w = 7$$

Sacando factor común, podemos escribir

$$w(w + 4) = 7$$

- El promedio de w y $w + 4$ es $w + 2$.
- La dispersión es 2.

Por tanto, teniendo en cuenta lo anterior,

$$w(w + 4) = (w + 2)^2 - 2^2$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Sustituyendo, resulta

$$w(w + 4) = 7 \qquad (w + 2)^2 - 2^2 = 7$$

Pero, ahora... ¡Ya podemos despejar!

$$\begin{aligned}(w + 2)^2 &= 7 + 2^2 \\ w + 2 &= \pm\sqrt{7 + 2^2} \\ w &= -2 \pm \sqrt{11}\end{aligned}$$

¡Qué inteligentes, estos babilonios!

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Podemos pensar en este patrón de manera más abstracta del siguiente modo. Supongamos que x es una incógnita y $\square$ una cantidad dada. Si sumamos estos dos números y elevamos al cuadrado, queda:

$$(x + \square)^2 = x^2 + 2\square x + \square^2$$

Reorganizando esto un poco, tenemos

$$x^2 + 2\square x = (x + \square)^2 - \square^2$$

Esto quiere decir que, cualquier cosa que se parezca a la parte de la izquierda, podemos reescribirla de manera que la x aparezca solo *una vez*, no dos veces.

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Por ejemplo, consideramos la ecuación

$$q^2 + 3q = 19$$

Podemos escribir

$$(q + \quad)^2 = 19 +$$

Observar que lo que tiene que ir entre paréntesis no es 3, sino **la mitad** de 3. Así que escribo:

$$\left(q + \frac{3}{2}\right)^2 = 19 +$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Pero el paréntesis desarrollado no solo va a dar q^2 además de $3q$, sino también la constante

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Así, para que nada cambie, tenemos que sumar esta cantidad también a la derecha:

$$\left(q + \frac{3}{2}\right)^2 = 19 + \frac{9}{4}$$

¡Ahora, despejar es pan comido!

La fórmula de la ecuación de 2º grado

¡Ojo! Recordad que $\frac{b}{2a}$ **no** es la cantidad por la que está multiplicada la x de la izquierda, sino más bien *la mitad* de esa cantidad. Para nuestra ecuación original, los pasos a seguir serían los siguientes:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividimos por a a ambos lados y pasamos la parte constante a la derecha:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos cuadrados para obtener:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Ahora podemos extraer la raíz cuadrada para despejar x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Podemos limpiar un poco para obtener la expresión que conocéis, más pulida:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula de la ecuación de 2º grado

Otra manera de hacerlo... ¡Elegid vuestra favorita!

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 + 4ac = b^2$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Multiplicamos por $4a$ a ambos lados.

Reescribimos (identidad notable).

Completamos el cuadrado que falta.

Aplicamos id. notable (al revés).

Agrupamos y extraemos raíz cuadrada.

¡Despejamos la incógnita!



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

`jserrander@educacion.navarra.es`